

Clasa a X a

1. a) Determinați partea întreagă a numărului $a = \log_2 5 + \log_5 8$;

b) Rezolvați ecuația: $(x-1)^{\log_3 5} = 1+x$.

Prelucrare RMCS 26

2. Trei numere complexe a, b, c se numesc *frați* dacă $a+b+c=abc$. Arătați că :

a. există trei *frați* nenuli ;

b. dacă unul dintre *frați* este 0, atunci imaginile geometrice ale celor trei *frați* sunt puncte coliniare ;

c. cel puțin unul dintre *frați* are modulul strict mai mic decât 2 .

Prelucrare după Ionel Tudor, RMT 1/2009

3. Să se arate că :

a) nu există funcții strict monotone $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(f(x)) = \{x\}, \forall x \in [0,1];$$

b) nu există funcții injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(f(x)) = [x], \forall x \in \mathbb{R};$$

c) există funcții bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(f(x)) = \frac{x+3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prelucrare GM 3 / 2004

4. Să se determine cel mai mic număr natural m pentru care

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{3} < m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.